Revista Científica ProHomine
RCPH
UNILAVRAS

Artigo Original

COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS E ALGÉBRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM CÁLCULO DE DEFLEXÃO DE VIGAS

Comparison between numeric and algebric methods for resolution of differential equations in calculation of beam deflection

Dennis Santos Tavares[1], Adriano Rodrigues[1], Ana Rubélia Mendes de Lima Resende[2]
[1]Centro Univeristário de Lavras - Lavras-MG, Brasil.
[2]Faculdade Presbiteriana Gammon - Lavras-MG, Brasil.

RESUMO
Deflexão é a deformação sofrida perpendicularmente ao eixo longitudinal de vigas devido à ação de cargas que nela atuam. Neste trabalho foi realizado o cálculo de deflexão de vigas através da resolução de equações diferenciais que modelam este fenômeno. A fim de resolver a equação diferencial característica da linha elástica de vigas, utilizaram-se métodos algébricos da integração direta e métodos numéricos, especificamente o método das Diferenças Finitas por meio de implementação computacional. O objetivo foi comparar os dois métodos com relação à precisão e facilidade de resolução. Esta comparação foi realizada de forma direta, exibindo-se os resultados exatos e aproximados de forma gráfica. Mensurou-se ainda os erros globais gerados pelo processo iterativo das Diferenças Finitas. Foi possível concluir que tanto o método analítico quanto o método iterativo chegaram em respostas similares. O Método das Diferenças Finitas apresentou alta precisão, gerando erros globais insignificantes quando comparados com a deflexão calculada, mostrando grande eficiência.
Palavras-chave: Método das Diferenças Finitas, Método da Integração Direta, Deflexão de Vigas, Equação Diferencial da Linha Elástica.

ABSTRACT
Deflection is the deformation suffered perpendicularly to the longitudinal axis of beams due to the action of the loads that act on it. In this work the beam deflection calculation was carried out through the resolution of differential equations that model this phenomenon. In order to solve the differential equation characteristic of the elastic line of beams, algebraic methods of direct integration and numerical methods were used, specifically the Finite Differences Method through computational implementation. The aim was to compare the two methods regarding to precision and easiness of resolution. This comparison was performed directly, showing the exact and approximate results graphically. The global errors generated by the iterative procedure of the Finite Differences Method were also measured. It was possible to conclude that both the analytical method and the iterative method attained similar answers. The Finite Differences Method presented high precision, showing great efficiency, generating insignificant global errors when compared to the calculated deflection.
Keywords: Finite Differences Method, Direct Integration Method, Beam Deflection, Elastic Line Differential Equation.

Introdução

Um dos elementos estruturais mais importantes das edificações são as vigas. Segundo Christoforo e Rocco Lahr:

> Vigas são elementos estruturais comumente empregados em construções civis, em projetos mecânicos e em construções rurais. Na mecânica dos sólidos, a determinação dos deslocamentos requer a resolução de equações diferenciais ordinárias. Pela natureza do problema a solução analítica nem sempre existe e, mesmo existindo, para alguns casos os trabalhos algébricos são dispendiosos. (2011, v.29, n.2, p.204)

A maioria dos engenheiros concorda que as equações diferenciais ordinárias são de extrema importância nos diversos cálculos necessários no seu exercício profissional. Para evidenciar esta relevância, basta observar a aplicabilidade desta ferramenta nos cálculos de estruturas, onde pode-se citar o caso da deflexão de vigas.

Neste contexto, é extremamente importante ao engenheiro dominar a resolução de equações diferenciais, pois isso possibilita-o, por exemplo, conhecer a deformação das estruturas. Este conhecimento é fundamental para conservar a integridade dos elementos associados à estrutura, visto que alvenarias e esquadrias podem ser afetadas negativamente pela deformação excessiva dos elementos estruturais.

A linha elástica é uma linha imaginária que representa a deformação longitudinal de uma viga. Cabe ressaltar ainda que é necessário ter conhecimento da forma em que cada tipo de apoio limita o deslocamento a fim de saber como se dá sua deformação devida às cargas que nela atuam.

No método da integração direta, aplicando-se duas integrações na equação diferencial da linha elástica, obtêm-se duas constantes de integração que são determinadas pelas condições de contorno do problema em questão. Os limites de integração são 0 e o valor correspondente ao comprimento total da viga.

Por outro lado, o Método das Diferenças Finitas (MDF) resolve o problema por aproximação numérica, onde expande-se o problema discretizado através das séries de Taylor e obtém-se um sistema linear que fornece a solução.

Cunha (2015) afirma que o MDF resolve equações diferenciais, por meio de aproximações, ou seja, é um método numérico, que opera através da aproximação da derivada por quocientes de números finitos, utilizando como ferramenta matemática básica as séries de Taylor na definição de tais aproximações.

Segundo Silva e Soares (2011) no MDF procede-se uma substituição do domínio contínuo, original do problema, por uma série de pontos discretos, nos quais são calculadas as variáveis do problema. Após esta discretização, aplica-se o MDF afim de determinar as incógnitas, aproximando as derivadas existentes na equação original por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas nos pontos do domínio discretizado fornece um sistema de equações algébricas, cuja resolução fornece os valores das incógnitas do problema nos pontos discretizados.

Neste trabalho procurou-se apresentar uma metodologia alternativa para a resolução de equações diferenciais que modelam o problema de deflexão de vigas, fazendo uma comparação entre a solução analítica (cálculo expedito) e a solução numérica (cálculo computacional). Para isso, realizou-se o cálculo da deflexão de um uma viga, tanto pelo método algébrico da Integração Direta como pelo método numérico das Diferenças Finitas, comparando-se os dois métodos e avaliando as vantagens e limitações de cada um deles.

Material e Métodos

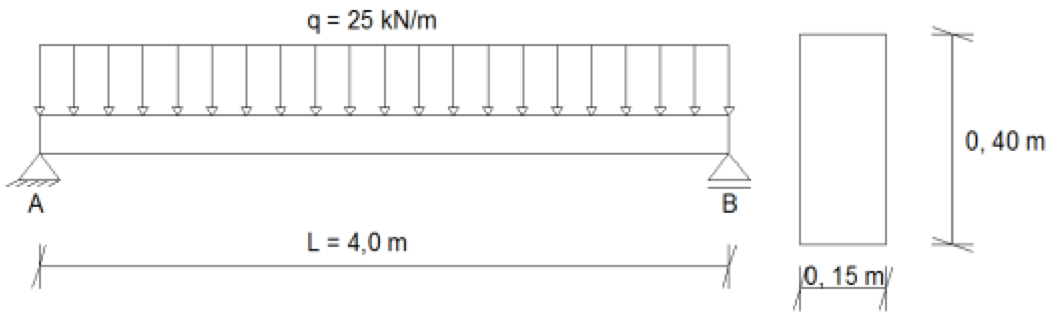
Conforme Beer e Johnston Jr (2008), em um ponto específico que se obtém a deflexão e declividade da viga tem-se a equação diferencial linear de segunda ordem, Equação (1) que modela a linha elástica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \qquad (1)$$

onde x e y são as coordenadas da linha elástica, M(x) é a função característica para o momento fletor de determinada viga, E é o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal da viga.

Para este estudo, considerou-se uma viga isostática biapoiada de secção transversal retangular com carregamento uniformemente distribuído atuando em seu eixo longitudinal. Para esta viga de concreto armado com módulo de elasticidade de 25,31 GPa[1], largura e altura pré-definidas, calculou-se a deflexão num ponto determinado, usando os dois métodos que foram objetos desta pesquisa: o método da integração direta e o método das diferenças finitas com discretização em 5, 10, 50 e 100 subintervalos. A Figura 1 ilustra a viga estudada.

Figura 1 – Viga isostática biapoiada de seção retangular com carga uniformemente distribuída.



Fonte: O autor (2017)

O cálculo por meio da integração direta foi expedito, enquanto o MDF foi realizado por meio de um algoritmo implementado computacionalmente. Para a implementação computacional foi utilizado o SageMath, um sistema de software livre de código aberto, licenciado sob a GPL (General Public License).

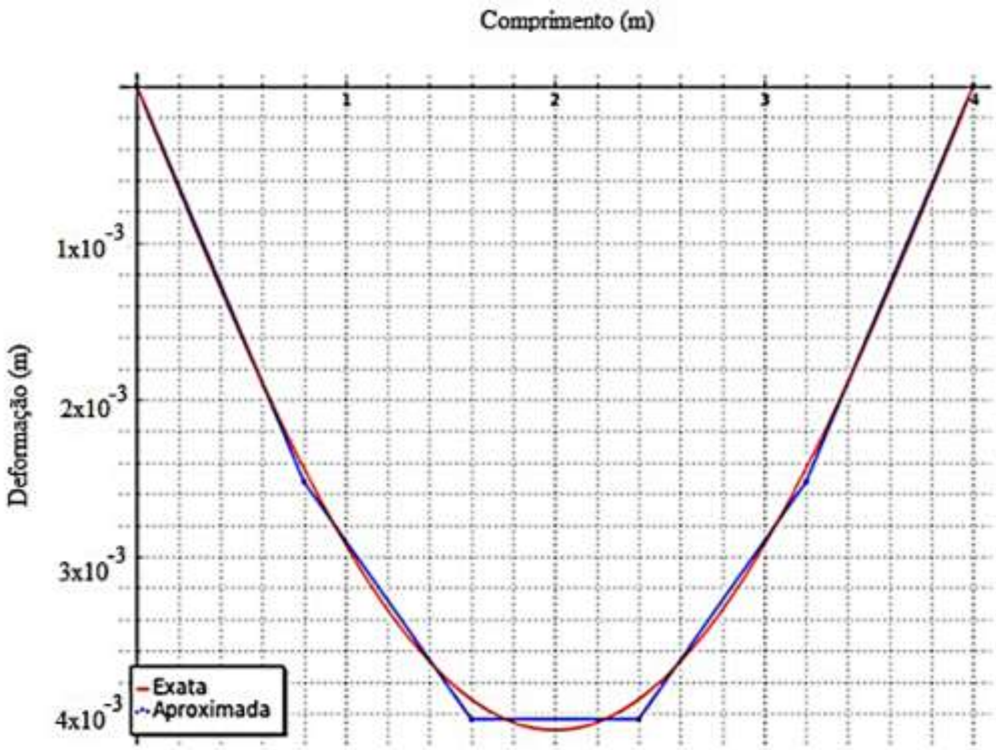
A comparação entre as duas metodologias de cálculo foi realizada por comparação direta, onde se explicitou os resultados encontrados, bem como os erros associados por meio de tabelas e gráficos. Foram calculados e avaliados os erros globais de cada aproximação.

[1] GPa significa gigapascal, ou seja 1GPa = 1.10^9 Pa. Cabe ressaltar que o pascal (símbolo Pa) é a unidade do Sistema Internacional de Unidades (SI) para medidas de pressão.

Resultados

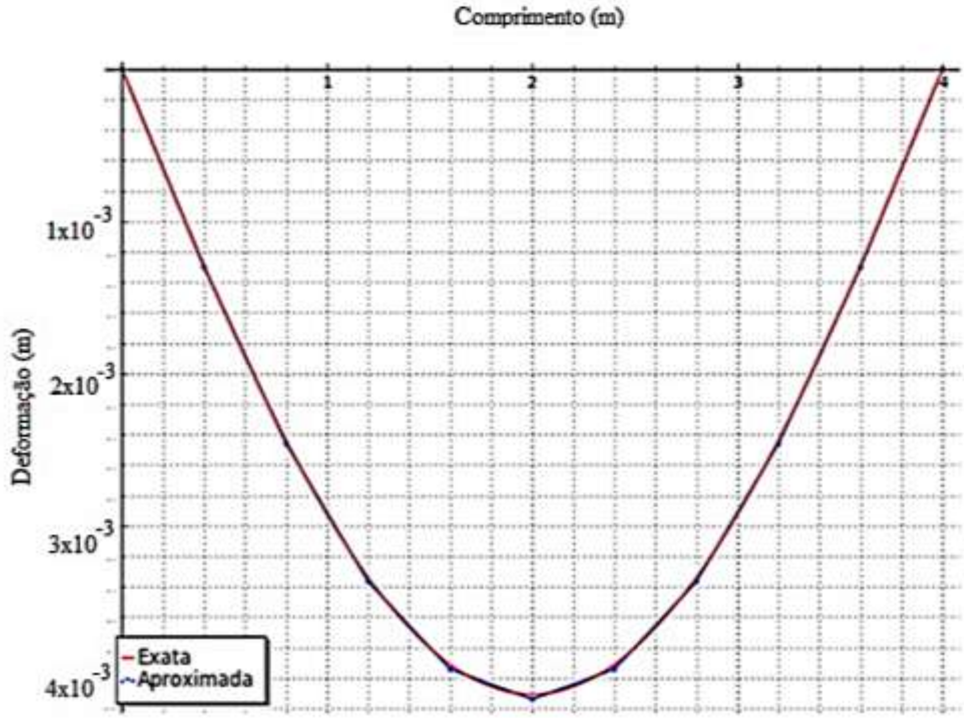
Os Gráficos 1, 2, 3 e 4 apresentam os resultados tanto da resolução algébrica (exata) como da resolução numérica (aproximada) para o problema da deflexão na viga analisada para 5, 10, 50 e 100 iterações respectivamente. A deformação é nula nas extremidades da viga e maior quanto mais próximo do centro, ou seja mais afastado dos apoios, sendo máxima no centro de seu eixo longitudinal.

Gráfico 1: Solução aproximada (método numérico) e exata (método algébrico), considerando 5 iterações



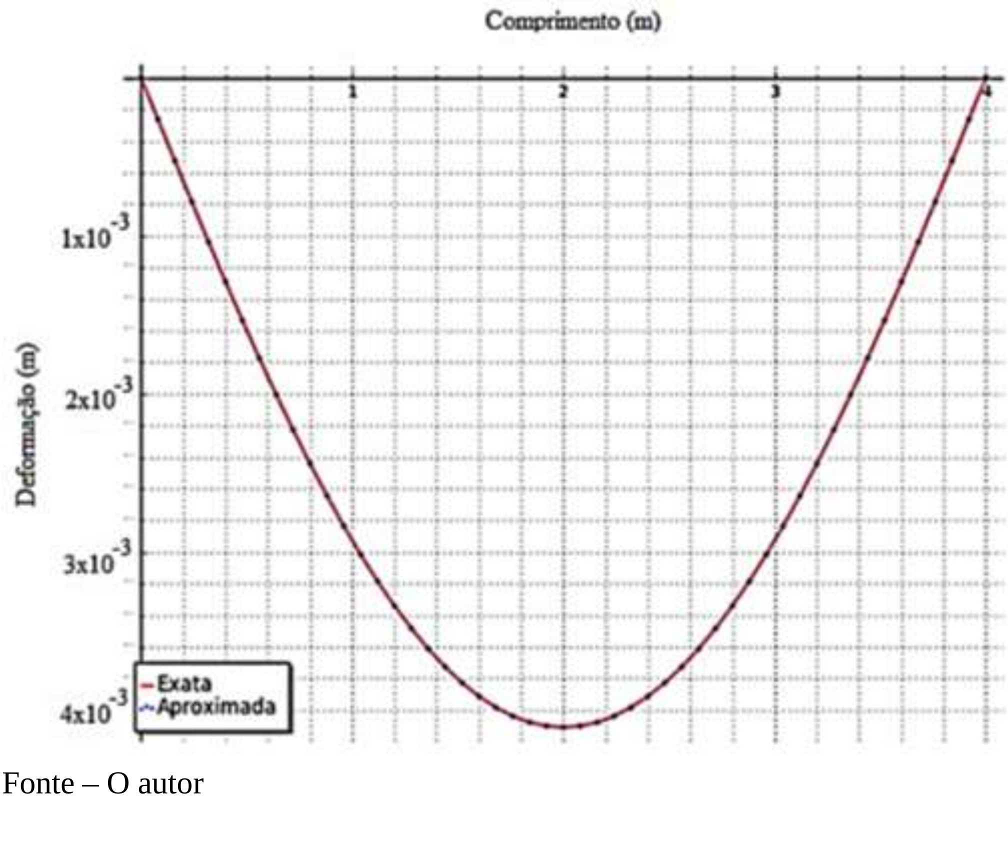
Fonte – O autor

Gráfico 2: Solução aproximada (método numérico) e exata (método algébrico), considerando 10 iterações



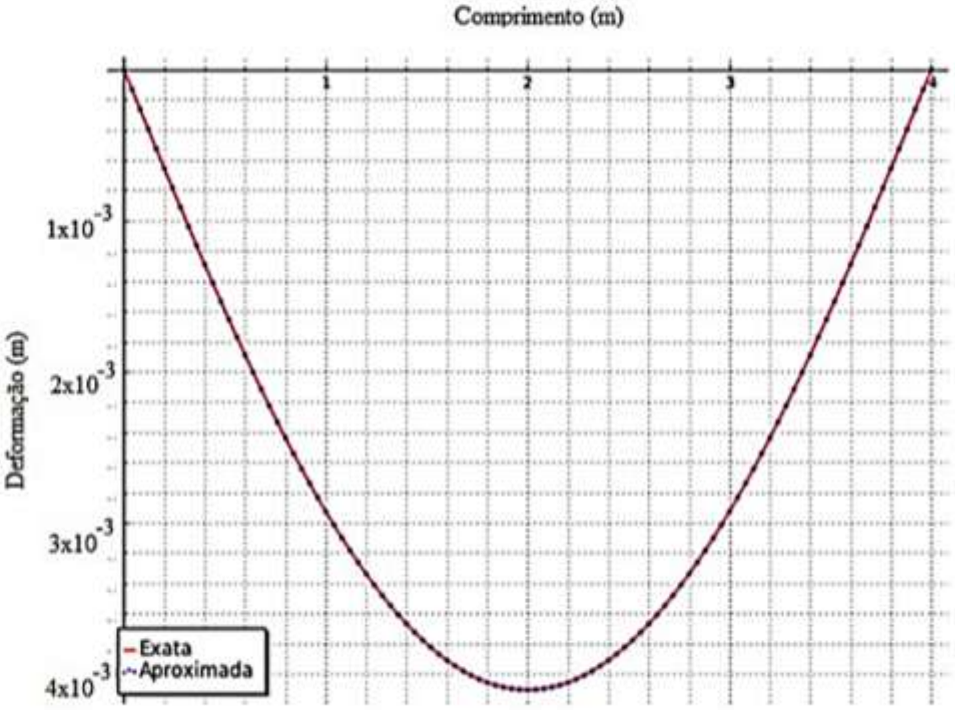
Fonte – O autor

Gráfico 3: Solução aproximada (método numérico) e exata (método algébrico), considerando 50 iterações



Fonte – O autor

Gráfico 4: Solução aproximada (método numérico) e exata (método algébrico), considerando 100 iterações



Fonte – O autor

A Tabela 1 mostra os erros globais resultantes da aplicação do Método das Diferenças Finitas para 5, 10, 50 e 100 subintervalos.

Tabela 1: Erro global para diferentes subintervalos considerados

Número de subintervalos	Erro global
5	$1{,}2589 \times 10^{-4}$
10	$3{,}2786 \times 10^{-5}$
50	$1{,}3115 \times 10^{-6}$
100	$3{,}2787 \times 10^{-7}$

Discussão

Pela análise visual das Figuras 1, 2, 3 e 4 percebe-se que as soluções aproximadas e exatas estão muito próximas, e esta proximidade aumenta à medida que aumenta-se o número de iterações para o método numérico analisado. Este resultado concorda com Silva & Soares (2011), que em seu estudo sobre deflexão de vigas demonstrou que com o aumento de subintervalos na viga biapoiada obtém-se uma melhor aproximação no valor da deformação quando comparada com o método analítico.

Percebe-se na Tabela 1 que o erro global tem pequena magnitude em comparação com o resultado da deflexão da viga. Este fato está de acordo com Thankane & Stys (2009) que, ao estudar a aplicação do Método das Diferenças Finitas para a resolução de equações que modelam a deflexão de vigas, confirmaram a alta precisão dos resultados, observando pequenos erros globais e relativos, o que também foi percebido neste trabalho.

Outro fato observado na Tabela 1 é que o erro global decresce com o aumento do número de iterações. Como o tempo computacional para a convergência do algoritmo é relativamente pequeno, este método apresenta a vantagem de poder ser aplicada em situações em que a abordagem analítica é demasiadamente complexa, como observa Stefan et al (2012) ao afirmar que o valor de tensão tangencial máxima coincide com a solução analítica.

Vale salientar que o Método das Diferenças Finitas não é novo na literatura, mas é pouco explorado no curso de Engenharia Civil, como ressalta Soares (2010) em relação aos métodos analíticos, que são amplamente utilizados no ensino de cálculo de estruturas.

Conclusões

Ao realizar a comparação dos dois métodos para a resolução da equação diferencial que modela a deflexão de uma viga, observou-se que tanto o método algébrico (integração direta) quanto o método numérico (diferenças finitas) apresentaram o mesmo resultado para uma viga específica tomada como referência.

O método algébrico apresenta como desvantagem o fato de ser expedito, ou seja, resolvido manualmente. Para vigas mais complexas estes cálculos podem consumir um grande tempo de execução.

O método numérico é demasiadamente trabalhoso para ser efetuado manualmente. Entretanto, a computação auxilia muito neste sentido, visto que o algoritmo de resolução pode ser implementado através de um programa com baixo tempo computacional.

Os erros mensurados no cálculo numérico foram de pequena magnitude quando comparados com a deflexão da viga, o que torna o Método das Diferenças Finitas viável do ponto de vista de produzir resultados confiáveis.

Referências

BEER, F. P; JOHNSTON JR, E. R. Resistência dos Materiais. 3.ed. São Paulo. Pearson.p. 815 - 1073, 2008.

CHRISTOFORO, A. L.; ROCCO LAHR, F. A. Emprego do Método dos Resíduos Ponderados na Determinação de Deslocamentos em Vigas. Revista Brasileira de Biometria, São Paulo, v. 29, n.2, p. 204-221, 2011.

CUNHA, M. C. C. Métodos Numéricos. 2.ed. 5ª reimpressão. Campinas: Unicamp, 2015.

HIBBELER, R. C. Análise das Estruturas. 8.ed. São Paulo. Pearson. p.2, 2013.

HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais. 7.ed. São Paulo. Pearson. p. 449 – 462, 2010.

SILVA, S. F; SOARES, A. A. B. O Método das Diferenças Finitas Aplicado à Teoria de Vigas. Revista Traços, on-line, Belém, v.13, n. 27, junho, 2011.

SOARES, A. A. B. O Método das Diferenças Finitas Aplicado a Teoria de Vigas. 2010. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia Civil) – Universidade da Amazônia, Belém.

STEFAN, A. et al. Numerical Determinations with Finite Differences Method of Prismatic Beams Subjected to Torsion. Proceedings of the World Congress on Engineering, 2012, V. 3, July 4 – 6, 2012, London, U.K.

STEIN, W. A. et al., Sage Mathematics Software (Version 4.3). The Sage Development Team, 2009, http://www.sagemath.org.

THANKANE, K. S; STYS. T. Finite Difference Method for Beam Equation with Free Ends Using Mathematica. Southern Africa Journal of Pure and Applied Mathematics, V. 4, August 15, 2009, Gaborone, Botswana.

Agradecimentos: Agradecemos ao apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que se concretizou com a concessão de bolsa de iniciação científica.

Endereço para correspondência: dennis_santostavares@yahoo.com.br